

1.10 ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Α. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ - ΔΙΑΙΡΕΣΗ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Πολλαπλασιασμός ρητών παραστάσεων

Σχηματίζουμε ένα κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών. Αναλύουμε σε γινόμενο όποιες παραστάσεις αναλύονται και απλοποιούμε .

2.

Διαίρεση ρητών παραστάσεων

Πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη

3.

Σύνθετο κλάσμα : Ονομάζεται κάθε κλάσμα που ένας τουλάχιστον όρος του είναι επίσης κλάσμα .

Τελική μορφή ενός συνθέτου κλάσματος είναι η $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ αυτό

γίνεται απλό με βάση τον κανόνα :

Το γινόμενο των άκρων όρων γράφεται αριθμητής και το

γινόμενο των μέσων παρονομαστής. Δηλαδή $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$

ΣΧΟΛΙΟ

Στον πολλαπλασιασμό ρητών παραστάσεων δεν εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς αλλά απλά τους σημειώνουμε και απλοποιούμε το τελικό αποτέλεσμα .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

$$\alpha) \frac{x}{3} \cdot \frac{x+2}{y} = \frac{x \cdot x+2}{3y}$$

$$\beta) \frac{7}{x} \cdot \frac{x}{x+5} = \frac{7}{x+5}$$

$$\gamma) x : \frac{y}{\omega+1} = \frac{x \cdot \omega+1}{y}$$

$$\delta) x : \frac{y}{2} = \frac{2x}{xy}$$

$$\epsilon) x : \frac{5}{y} = \frac{xy}{5}$$

$$\sigma\tau) \frac{a}{x} \cdot \frac{x-5}{x} = \frac{ax-5}{x^2}$$

$$\zeta) \frac{x}{y} : \frac{x^2}{y^2} = \frac{y}{x}$$

$$\eta) \frac{\kappa}{\lambda+3} : \frac{\kappa}{\lambda+3} = 1$$

$$\theta) \frac{(x-y)^2}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{(y-x)^2} = \frac{1}{2}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\alpha) \frac{x}{3} \cdot \frac{x+2}{y} = \frac{x \cdot (x+2)}{3y} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Lambda$$

$$\beta) \frac{7}{x} \cdot \frac{x}{x+5} = \frac{7x}{x(x+5)} = \frac{7}{x+5} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Sigma$$

$$\gamma) x : \frac{y}{\omega+1} = x \cdot \frac{\omega+1}{y} = \frac{x \cdot (\omega+1)}{y} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Lambda$$

$$\delta) x : \frac{y}{2} = x \cdot \frac{2}{y} = \frac{2x}{y} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Lambda$$

$$\epsilon) x : \frac{5}{y} = x \cdot \frac{y}{5} = \frac{xy}{5} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Sigma$$

$$\sigma\tau) \frac{a}{x} \cdot \frac{x-5}{x} = \frac{a(x-5)}{x^2} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Lambda$$

$$\zeta) \frac{x}{y} : \frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2} = \frac{xy^2}{yx^2} = \frac{y}{x} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Sigma$$

$$\eta) \frac{\kappa}{\lambda+3} : \frac{\kappa}{\lambda+3} = \frac{\kappa}{\lambda+3} \cdot \frac{\lambda+3}{\kappa} = \frac{\kappa(\lambda+3)}{\kappa(\lambda+3)} = 1 \quad \text{οπότε η πρόταση } \Sigma$$

$$\theta) \frac{(x-y)^2}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{(y-x)^2} = \frac{(x-y)^2(x+2)}{2(x+2)(x-y)^2} = \frac{1}{2} \quad \text{οπότε η πρόταση } \Sigma$$

2.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{6\alpha^2 + 6\beta^2} \cdot \frac{3\alpha^2 + 3\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta}$$

$$\beta) \frac{3\alpha - 5\beta}{7\gamma^2} \cdot \frac{42\alpha\gamma - 42\beta\gamma}{3\alpha x - 5\beta x + 3\alpha y - 5\beta y} \cdot (x + y)$$

$$\gamma) \frac{x^2 - 9}{x + y} : \frac{x + 3}{x^2 - y^2}$$

$$\delta) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha - \beta} : \frac{x + y}{3x}$$

$$\epsilon) \frac{\frac{2x^2 - 3xy}{x^2 - y^2}}{\frac{2x - 3y}{x + y}}$$

$$\sigma\tau) \frac{x + 2}{x - 1} : \left(\frac{2x + 6}{x - 1} \cdot \frac{x + 2}{x + 3} \right)$$

Προτεινόμενη Λύση

α)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{6\alpha^2 + 6\beta^2} \cdot \frac{3\alpha^2 + 3\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta} &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(3\alpha^2 + 3\beta^2)}{(6\alpha^2 + 6\beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta)} = \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \cdot 3(\alpha^2 + \beta^2)}{6(\alpha^2 + \beta^2)\alpha(\alpha - \beta)} = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} \frac{(3\alpha - 5\beta)(42\alpha\gamma - 42\beta\gamma)(x + y)}{7\gamma^2(3\alpha x - 5\beta x + 3\alpha y - 5\beta y)} &= \frac{(3\alpha - 5\beta)42\gamma(\alpha - \beta)(x + y)}{7\gamma^2[3\alpha(x + y) - 5\beta(x + y)]} = \\ &= \frac{(3\alpha - 5\beta)42\gamma(\alpha - \beta)(x + y)}{7\gamma^2(x + y)(3\alpha - 5\beta)} = \frac{6\gamma(\alpha - \beta)}{\gamma} \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 9}{x + y} : \frac{x + 3}{x^2 - y^2} &= \frac{x^2 - 9}{x + y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x + 3} = \\ &= \frac{(x^2 - 9)(x^2 - y^2)}{(x + y)(x + 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)(x - y)(x + y)}{(x + 3)(x + y)} = \\ &= (x - 3)(x - y) \end{aligned}$$

δ)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha - \beta} : \frac{x + y}{3x} &= \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(x^2 - y^2)3x}{(x - y)(\alpha - \beta)(x + y)} = \\ &= \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(x - y)(x + y)3x}{(x - y)(\alpha - \beta)(x + y)} = 3x(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

ε)

$$\frac{\frac{2x^2 - 3xy}{x^2 - y^2}}{\frac{2x - 3y}{x + y}} = \frac{(2x^2 - 3xy)(x + y)}{(x^2 - y^2)(2x - 3y)} = \frac{x(2x - 3y)(x + y)}{(x + y)(x - y)(2x - 3y)} = \frac{x}{x - y}$$

στ)

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{x - 1} : \left(\frac{2x + 6}{x - 1} \cdot \frac{x + 2}{x + 3} \right) &= \frac{x + 2}{x - 1} : \left(\frac{(2x + 6)(x + 2)}{(x - 1)(x + 3)} \right) = \\ &= \frac{x + 2}{x - 1} \cdot \frac{(x - 1)(x + 3)}{2(x + 3)(x + 2)} = \frac{(x + 2)(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)2(x + 3)(x + 2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) \frac{7xy}{\omega^2} \cdot \frac{3a\omega}{y^2}$$

$$\beta) \left(\frac{-3x^3y}{2a\beta^2} \right) \cdot \left(\frac{4a\beta^3}{-5xy^2} \right) \cdot \left(\frac{10ay}{\beta x^2} \right)$$

$$\gamma) \frac{x^2-1}{\alpha+\beta} : \frac{x+1}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\delta) \frac{3x+2}{5x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2-4} \cdot \frac{3x-2}{4}$$

$$\epsilon) \left(\frac{6x^3\omega}{5a\beta} \right) \cdot \left(\frac{\beta^2 x \omega}{a\gamma} \right) : \left(\frac{2x^2\omega}{5a\beta\gamma} \right)$$

$$\sigma\tau) \frac{x^2-25}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-9x+20}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

$$\frac{7xy}{\omega^2} \cdot \frac{3a\omega}{y^2} = \frac{7xy \cdot 3a\omega}{\omega^2 y^2} = \frac{21x\alpha}{\omega y}$$

β)

$$\begin{aligned} \left(\frac{-3x^3y}{2a\beta^2} \right) \cdot \left(\frac{4a\beta^3}{-5xy^2} \right) \cdot \left(\frac{10ay}{\beta x^2} \right) &= \frac{(-3x^3y)(4a\beta^3)(10ay)}{(2a\beta^2)(-5xy^2)(\beta x^2)} = \\ &= \frac{(-3 \cdot 4 \cdot 10)x^3y^2a^2\beta^3}{(-2 \cdot 5)a\beta^3x^3y^2} = 12a \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{\alpha+\beta} : \frac{x+1}{\alpha^2-\beta^2} &= \frac{x^2-1}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\alpha^2-\beta^2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)(x+1)} = \\ &= (x-1)(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

δ)

$$\frac{3x+2}{5x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2-4} \cdot \frac{3x-2}{4} = \frac{(3x+2) \cdot 2x(3x-2)}{5x^2(3x-2)(3x+2) \cdot 4} = \frac{1}{10x}$$

ε)

$$\begin{aligned} \left(\frac{6x^3\omega}{5a\beta} \right) \cdot \left(\frac{\beta^2 x \omega}{a\gamma} \right) : \left(\frac{2x^2\omega}{5a\beta\gamma} \right) &= \left(\frac{6x^3\omega \cdot \beta^2 x \omega}{5a\beta \cdot a\gamma} \right) \cdot \left(\frac{5a\beta\gamma}{2x^2\omega} \right) = \\ &= \frac{6x^3\omega \cdot \beta^2 x \omega \cdot 5a\beta\gamma}{5a\beta \cdot a\gamma \cdot 2x^2\omega} = \frac{3x^2\omega\beta^2}{a} \end{aligned}$$

στ)

$$\begin{aligned} \frac{x^2-25}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-9x+20} &= \frac{(x-5)(x+5)(x-2)(x+2)}{(x+2)[x^2-(4+5)x+4 \cdot 5]} = \\ &= \frac{(x-5)(x+5)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-4)(x-5)} = \frac{(x+5)(x-2)}{(x-4)} \end{aligned}$$

4.

Ομοίως οι πράξεις

$$\alpha) \frac{x^2 - y^2}{4\alpha^2 + 4\beta^2} \cdot \frac{8\alpha^2 + 8\beta^2}{x^2 - xy}$$

$$\beta) \frac{4x+3}{3x^2} \cdot \frac{6x}{16x^2-9} \cdot \frac{4x-3}{2}$$

$$\gamma) \frac{x^2 - xy}{x^2 - 4} : \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x + 2y + xy}$$

$$\delta) \frac{x+y}{x^2 - 2xy + y^2} : \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\epsilon) \frac{x^2 + 2xy + y^2 - \alpha^2}{y^2 - \gamma^2 + 2\gamma x - x^2} \cdot \frac{y^2 - \gamma^2 + x^2 - 2xy}{(y - \gamma)^2 - x^2} : \frac{x + y + \alpha}{x + y - \alpha}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{x^2 - y^2}{4\alpha^2 + 4\beta^2} \cdot \frac{8\alpha^2 + 8\beta^2}{x^2 - xy} = \frac{(x-y)(x+y)8(\alpha^2 + \beta^2)}{4(\alpha^2 + \beta^2)x(x-y)} = \frac{2(x+y)}{x}$$

β)

$$\frac{4x+3}{3x^2} \cdot \frac{6x}{16x^2-9} \cdot \frac{4x-3}{2} = \frac{(4x+3)6x(4x-3)}{3x^2(4x-3)(4x+3) \cdot 2} = \frac{1}{x}$$

γ)

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - xy}{x^2 - 4} : \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x + 2y + xy} &= \frac{x(x-y)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x(x+y) + 2(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \\ &= \frac{x(x-y)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+y)(x+2)}{(x-y)(x+y)} = \\ &= \frac{x(x-y)(x+y)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-y)(x+y)} = \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

ε)

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 + 2xy + y^2 - \alpha^2}{y^2 - \gamma^2 + 2\gamma x - x^2} \cdot \frac{y^2 - \gamma^2 + x^2 - 2xy}{(y - \gamma)^2 - x^2} : \frac{x + y + \alpha}{x + y - \alpha} = \\ &= \frac{(x^2 + 2xy + y^2) - \alpha^2}{y^2 - (\gamma^2 - 2\gamma x + x^2)} \cdot \frac{(y^2 + x^2 - 2xy) - \gamma^2}{(y - \gamma)^2 - x^2} : \frac{x + y + \alpha}{x + y - \alpha} = \\ &= \frac{(x+y)^2 - \alpha^2}{y^2 - (\gamma - x)^2} \cdot \frac{(y-x)^2 - \gamma^2}{(y - \gamma)^2 - x^2} : \frac{x + y + \alpha}{x + y - \alpha} = \\ &= \frac{[(x+y)^2 - \alpha^2][(y-x)^2 - \gamma^2]}{[y^2 - (\gamma - x)^2][(y - \gamma)^2 - x^2]} \cdot \frac{x + y - \alpha}{x + y + \alpha} = \\ &= \frac{(x+y-\alpha)(x+y+\alpha)(y-x-\gamma)(y-x+\gamma)}{(y-\gamma+x)(y+\gamma-x)(y-\gamma-x)(y-\gamma+x)} \cdot \frac{x+y-\alpha}{x+y+\alpha} = \frac{(x+y-\alpha)^2}{(y-\gamma+x)^2} \end{aligned}$$

6.

Ομοίως οι πράξεις

$$\alpha) \left[\frac{x^2(x-4)^2}{(x+4)^2-4x} \cdot \frac{64-x^3}{16-x^2} \right] : \frac{(x^2-4x)^3}{(x+4)^2} \quad \beta) \left[\frac{x^2-1}{x^4-2x^3+x^2} \cdot \frac{x^3-1}{x^2+2x+1} \right] : \frac{x^2+x+1}{x^2}$$

$$\gamma) \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+8} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^3-4x}$$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{x^2(x-4)^2}{(x+4)^2-4x} \cdot \frac{64-x^3}{16-x^2} \right] : \frac{(x^2-4x)^3}{(x+4)^2} = \\ & = \left[\frac{x^2(x-4)^2}{x^2+8x+16-4x} \cdot \frac{4^3-x^3}{(4-x)(4+x)} \right] : \frac{(x^2-4x)^3}{(x+4)^2} = \\ & = \left[\frac{x^2(x-4)^2}{x^2+4x+16} \cdot \frac{(4-x)(16+4x+x^2)}{(4-x)(4+x)} \right] : \frac{(x^2-4x)^3}{(x+4)^2} = \\ & = \frac{x^2(x-4)^2}{4+x} \cdot \frac{(x+4)^2}{[x(x-4)]^3} = \frac{x^2(x-4)^2(x+4)^2}{(4+x)x^3(x-4)^3} = \frac{x+4}{x(x-4)} \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} & \left[\frac{x^2-1}{x^4-2x^3+x^2} \cdot \frac{x^3-1}{x^2+2x+1} \right] : \frac{x^2+x+1}{x^2} = \\ & = \frac{(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}{x^2(x^2-2x+1)(x+1)^2} \cdot \frac{x^2}{x^2+x+1} = \\ & = \frac{(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)x^2}{x^2(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

γ)

$$\begin{aligned} & \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^3+8} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^3-4x} = \\ & = \frac{x^2(x-1)-4(x-1)}{x^3+2^3} \cdot \frac{(x+2)^2}{x(x^2-4)} = \\ & = \frac{(x-1)(x^2-4)}{x^3+2^3} \cdot \frac{(x+2)^2}{x(x^2-4)} = \\ & = \frac{(x-1)(x^2-4)(x+2)^2}{(x+2)(x^2-2x+4)x(x^2-4)} = \\ & = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x^2-2x+4)} \end{aligned}$$